

奧數培訓班所用書籍



奧數培訓班學生習作(習作由資深奧數導師余潤林老師編製)

巧算題

班別: 4A 姓名: 吳恩儀

7.1 平方數

完全平方數 n^2 ，簡稱平方數，如: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 81, 100, ...。
平方數的末位數只會是 0, 1, 4, 5, 6, 9 共 6 個數，不會是 2, 3, 7, 8。

7.1.1 平方數 n^2 可以寫成兩種連加式的和，

1) 首 n 個奇數之和 = $1+3+5+7+9+\dots+(2n-1) = [1+(2n-1)]/2 \times n = n^2$ ，
此處第 n 項是 $(2n-1)$

a) $1+3+5+7+9+11 = 6^2 = 36$ ，第 6 項是 $(2 \times 6 - 1) = 11$

$= \frac{1+(2n-1)}{2} \times n = \frac{2n}{2} \times n = n^2$

b) $1+3+5+7+9+\dots+2009 = ?$

先用 $2n-1=2009$ 解得 項數 $n=(2009+1)/2 = 1005$ ，

所以 $1+3+5+7+9+\dots+2009 = 1005^2 = 1010025$

$\therefore n = (2009+1) \div 2 = 1005$

$\therefore 1005 \times 1005 = 1010025$

2) 連續加首 n 個自然數然後倒數加

$1+2+3+\dots+(n-2)+(n-1)+n+(n-1)+(n-2)+\dots+3+2+1 = n^2$

a) $1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1 = 6^2 = 36$

$\therefore n = 6$

b) $1+2+3+\dots+18+19+20+19+18+\dots+3+2+1 = 20^2 = 400$

7.1.2 a 及 b 兩數的平方差等於該兩數之和乘以兩數之差。 $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$

1) $10^2 - 7^2 = (10+7) \times (10-7) = 17 \times 3 = 51$

2) $2009^2 - 1949^2 = (2009+1949) \times (2009-1949) = 3958 \times 60 = 237480$

3) $\frac{(2^2+4^2+6^2+\dots+100^2) - (1^2+3^2+5^2+\dots+99^2)}{10^2} = \frac{2^2+4^2+6^2+\dots+100^2 - 1^2-3^2-5^2-\dots-99^2}{10^2}$
 $= \frac{[(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+\dots+(100^2-99^2)]/10^2}{10^2} = \frac{(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+\dots+(100-99)(100+99)}{10^4}$
 $= \frac{[1+2+3+4+\dots+99+100]/100}{100} = \frac{(1+100)/2}{100}$
 $= 50.5$

7.1.3 有趣的 111...111(n 個 1) 及其平方數的計算性質

1) $111 = 3 \times 37$, $1001 = 7 \times 11 \times 13$, $111111 = 111 \times 1001 = 3 \times 37 \times 7 \times 11 \times 13$ ，
所以 111111(6 個 1) 是 3, 7, 11, 13, 37 任何一個數的倍數。

2) $111111111 = 111 \times 1001001 = 12345679 \times 9$

3) $111^2 = 12321$

$111111111^2 = 12345679009010101$

4) $111111111^2 = 12345678987654321$

5) $10101^2 = 102030201$

6) $11111111111^2 = 123456789ABA987654321 = 123456790120987654321$
(此處 A=10, B=11 後再作調整)

5.1 定義新運算

加、減、乘、除是我們最熟悉的四種運算。除熟悉的運算外，我們還可以定義一些其他運算。解此類運算題時，須注意以下幾點：

- 1) 明確理解新運算符號所代表的特定含義。
- 2) 嚴格按照新運算的法則代入數值及順序進行運算。
- 3) 在進行運算時，不要隨便使用各種運算律(如交換律、分配律等)，因這些新運算是否具備某些運算律還須驗證。

1) 已知 $a*b = 3 \times a - b$ ，那麼 $12*5 = ?$
 $12*5 = 3 \times 12 - 5 = 31$

2) 已知 $a*b = \frac{a+b}{2}$ 那麼 $13*19 = ?$
 $13*19 = \frac{13+19}{2} = 16$

3) 已知 $a*b = a \times b - (a+b)$ ，那麼 $12*13 = ?$
 $12*13 = 12 \times 13 - (12+13) = 156 - 25 = 131$

4) 已知 $a \oplus b = a^2 + b^2$ ，如： $4 \oplus 5 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ ，那麼 $6 \oplus 8 = ?$
 $6 \oplus 8 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

5) 已知 $a*b = (a+1) + (a+2) + \dots + (a+b)$ 及 $X*5 = 50$ ，那麼 $X = ?$
 $X*5 = (X+1) + (X+2) + (X+3) + (X+4) + (X+5) = 5X + 15 = 50$
 $5X = 50 - 15 = 35$ ， $X = 7$

6) 已知 $a \oplus b = \frac{a+b}{a-b}$ ，那麼 $8 \oplus [4 \oplus (2 \oplus 3)] = ?$
 $2 \oplus 3 = \frac{3+2}{3-2} = 5$ ， $4 \oplus 5 = \frac{5+4}{5-4} = 9$ ， $8 \oplus 9 = \frac{9+8}{9-8} = 17$ ，
 $8 \oplus [4 \oplus (2 \oplus 3)] = 8 \oplus (4 \oplus 5) = 8 \oplus 9 = 17$

7) 已知 $5 \oplus 8 = 18$ ， $9 \oplus 7 = 25$ ， $6 \oplus 21 = 33$ ， $14 \oplus 2 = 30$ ，那麼 $7 \oplus 3 = ?$
 由 $18 - 5 - 8 = 5$ ， $25 - 9 - 7 = 9$ ， $33 - 6 - 21 = 6$ ， $30 - 14 - 2 = 14$ 得出 $a \oplus b = 2 \times a + b$ ，
 $7 \oplus 3 = 2 \times 7 + 3 = 17$

8) 已知 $5 \oplus 3 = 5 \times 6 \times 7 = 210$ ， $8 \oplus 4 = 8 \times 9 \times 10 \times 11 = 7920$ ，那麼 $(6 \oplus 2) + (4 \oplus 4) = ?$
 $(6 \oplus 2) + (4 \oplus 4) = 6 \times 7 + 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 42 + 840 = 882$

9) 已知 $f(x) = 4x + 1$ ，那麼 $f(502) = ?$
 $f(x) = 4x + 1 = 4 \times 502 + 1 = 2009$

10) 已知 $[a, b, c, d] = 4 \times c + d - a \times b$ ，那麼 $[19, 3, 14, 6] = ?$
 $[19, 3, 14, 6] = 4 \times 14 + 6 - 19 \times 3 = 56 + 6 - 57 = 5$

計算能力是學好數學的基礎，學生不但要會算，而且還要算得好，算得好的意思是指算得快、算得巧。準確、快速地計算既是技巧的體現，也是思維的訓練；既能提高計算效率；節省筆算時間，又可鍛煉記憶力、提高分析、綜合、判斷的能力，從而促進思維的靈活性、創造性的發展。

1.1 加減法中的巧算

前+內不變
前-內要變

加法交換律： $a+b=b+a$

加法結合律： $(a+b)+c=a+(b+c)$

加減混合運算性質(去添括號):

- (1) $a+b-c=a-c+b=a+(b-c)$
- (2) $a-b-c=a-c-b=a-(b+c)$
- (3) $a-(b-c)=a-b+c=a+c-b$

1) 湊成整十、整百、整千、...的數

- a) $54+23+46+77=(54+46)+(23+77)=100+100=200$
- b) $1732+154+268+46=(1732+268)+(154+46)=2000+200=2200$
- c) $101+212+323+434+899+788+677+566$
 $=-(101+899)+(212+788)+(323+677)+(434+566)=4000$
- d) $7208+1626+854+1374+446+32792$
 $=-(7208+32792)+(1626+1374)+(854+446)=40000+3000+1300=44300$
- e) $8356+517-(356+217)=(8356-356)+(517-217)=8000+300=8300$
- f) $46532+14-1234-127-1766+186+3468-573$
 $=-(46532+3468)+(14+186)-(1234+1766)-(127+573)$
 $=50000+200-3000-700=50200-3700=46500$

2) 補整法 - 接近十、百、千、萬、...的運算

用整十、百、千、萬...的數減去補數再綜合運算

- a) $9+99+999+9999+99999=(10-1)+(100-1)+(1000-1)+(10000-1)+(100000-1)$
 $=111110-5=111105$
 $=111110-1 \times 5=111105$
- b) $999999+99998+9997+996+95$
 $=-(1000000-1)+(100000-2)+(10000-3)+(1000-4)+(100-5)$
 $=1111100-(1+2+3+4+5)=1111100-15=1111085$
 $=1111100-1-2-3-4-5=1111085$
- c) $17+296+3995+49994+599993$
 $=-(20-3)+(300-4)+(4000-5)+(50000-6)+(600000-7)$
 $=-(20+300+4000+50000+600000)-(3+4+5+6+7)=654320-25=654295$
 $=20+300+4000+50000+600000-3-4-5-6-7=654320-25$
- d) $4321-798-497=4321-800+2-500+3=4321-(800+500)+(2+3)=3026$
 $=654295$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

前+後

$128+64+32+16+8+4+2+1+1=256-1=255$